(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
மூன்றாம் தவணைப் பரீட்சை - 2023
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
3rd Term Examination - 2023

FWC

இணைந்த கணிதம் – B
Combined mathematics – B

Gr -12 (2023) | **10** | **T** | **B**

11. (a) $f(x) = x^2 + (2k+1)x + 2k - 5$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $k \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 0$ இன் பிரித்துக்காட்டியை k சார்பில் எழுதுக. **இதிலிருந்து,** சமன்பாடு $f(x) = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனவும் கொள்வோம். $\alpha + \beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை k சார்பில் எழுதுக. α, β ஆகிய இரண்டும் மறையாக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது $k > 3$ எனக் கொள்வோம். $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து, $f\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$ இன் மூலங்கள் γ, δ எனின், $\sqrt{\frac{2\gamma}{\delta}}, \sqrt{\frac{2\delta}{\gamma}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k சார்பில் காண்க.

(b) $f(x) = 3x^3 + ax^2 + x + b$ எனவும் $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $x + 1$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 1 எனவும் $g(x)$ ஆனது $x^2 + x - 2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $2x + 5$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும் a, b, c ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $3g(x) - f(x) \geq -\frac{25}{28}$ எனக் காட்டுக.

12. (a) $x \neq 0$ இற்கு $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 0$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \frac{4-x}{x^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க. மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq 0$ இற்கு $f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதி $f''(x)$ ஆனது $f''(x) = \frac{2(x-6)}{x^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

$y = f(x)$ இன் வரைபை அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள், அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

(b) $ABCD$ என்பது ஒரு செவ்வகமாகும். மீற்றரில் அளக்கப்படும் அதன் பக்கங்களின் நீளங்கள் $AB = a$, $BC = b$ இனால் தரப்பட்டுள்ளன. பக்கம் CD மீது P என்னும் புள்ளி உள்ளது. $PA^2 + PB^2$ ஆனது குறைந்தபட்சமாக இருப்பதற்கு P ஆனது CD யின் நடுப்புள்ளியாக இருக்க வேண்டும் எனக் காட்டுக.

13. புள்ளி $P \equiv (x_1,\ y_1)$ இலிருந்து, நேர்கோடு $l \equiv ax + by + c = 0$ இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என்பதை நிறுவுக.

முக்கோணி ABC இன் இரு உச்சிகள் $A \equiv (1, 5\,)$, $C \equiv (3, 4\,)$ ஆகும். பக்கம் AB ஆனது $2x - 5y + 23 = 0$ என்னும் கோட்டின் மீது கிடக்கின்றது.

பக்கம் AC யின் நீளத்தையும் A, C இனூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

A, B இனூடாகச் செல்லும் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் $(5t + 1, 2t + 5)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $4\frac{1}{2}$ சதுர அலகுகள் எனவும் முக்கோணி முழுவதும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் கிடக்கின்றது எனவும் மேலும் தரப்பட்டுள்ளன. உச்சி B இலிருந்து AC இற்கான செங்குத்துத் தூரத்தைக் கருதுவதன் மூலம் உச்சி B யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$B,\ C$ இனூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

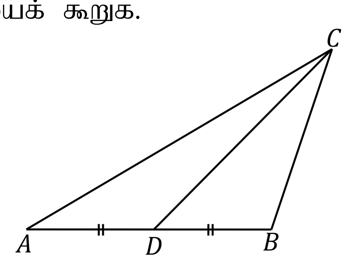
14. (a) $\sin(A + B)$ இன் விரிவை எழுதுக. **இதிலிருந்து,** $\cos(A + B)$ இன் விரிவை பெறுக.

A, B இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானங்களை இடுவதன் மூலம் $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ எனவும் $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$ எனவும் காட்டுக. $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$ என எழுதுவதன் மூலம் $\cos 3\theta = 4cos^3\theta - 3\cos\theta$ எனக் காட்டுக. இறுதியாகப் பெற்ற முடிவில் θ இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானத்தை இடுவதன் மூலம் $\cos\frac{\pi}{12}$ என்பது சமன்பாடு $4\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{2}x - 1 = 0$ இன் ஒரு மூலம் எனக் காட்டுக.

$4\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{2}x - 1 = (\sqrt{2}x + 1)(4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ என்பதை **உய்த்தறிக.**

(b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு சைன் நெறியைக் கூறுக.

உருவில் காட்டப்பட்ட முக்கோணி ABC இல் AB யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும். $B\hat{A}C = B\hat{C}D = \beta$ உம் $B\hat{D}C = \alpha$ உம் ஆகும். முக்கோணிகள் $ACD,\ BCD$ ஆகியவற்றிற்கு சைன்



(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

நெறியைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ எனக் காட்டுக. மேலும் $\tan^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$ எனவும் காட்டுக.

(c) சமன்பாடு $\sin^{-1}\left(\frac{e^x}{5e^x-6}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

15.a) தரைக்கு மேலே உயரம் $2a$ இல் உள்ள புள்ளி ஒன்றில் இருந்து கதி $2gT$ உடன் கிடையாக எறியப்படும் துணிக்கை புவியீர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாக இயங்குகீன்றது. இங்கு T மாறிலி ஆகும். துணிக்கை தரையை அடிக்கும் வரைக்குமான துணிக்கையின் கிடை, நிலைக்குத்து இயக்கங்களுக்கான வேகநேர வரைபுகளை தனித்தனியாக வரைக. துணிக்கை தரையை அடிக்கும் போது எறியற் புள்ளியில் இருந்தான கிடைத்தூரம் $4gT^2$ எனில் வேக நேர வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி

i) துணிக்கை தரையை அடிக்க எடுக்கும் நேரத்தை T சார்பில் காண்க

ii) துணிக்கை தரையை அடிக்கும் வேகத்தைக் காண்க.

iii) a ஐ $g,\ T$ சார்பில் காண்க.

b) ஒருகுறித்த கணத்தில் $A\,,B$ என்னும் கப்பல்கள் துறைமுகம் H இல் இருந்து முறையே $12\,km$ மேற்கிலும் $4\sqrt{3}km$ வடக்கிலும் உள்ளன. கப்பல் Aஆனது $12km/h$ சீரான கதியுடன் கிழக்கு நோக்கியும் கப்பல் B ஆனது $12\sqrt{3}km/h$ சீரான கதியுடன் தெற்கு நோக்கியும் ஒரே நேரத்தில் பயணிக்கின்றன.

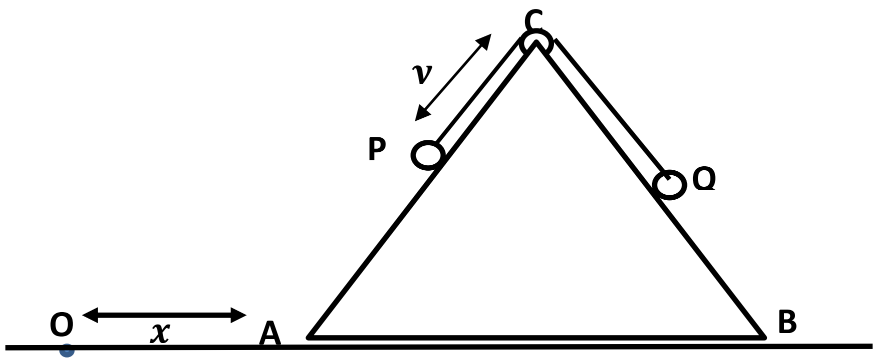
i) சார்பு வேகக் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி வேக முக்கோணி வரைவதன் மூலம் B சார்பாக A இன் வேகத்தைக் காண்க.

ii) B சார்பாக A இன் பாதையை வரைக

$iii)$ $A\,,B$ க்கு இடையிலான மிகக் கிட்டிய தூரத்தைக் காண்க.

iv) மிகக் கிட்டிய தூரத்தை அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

16)



உருவில் ABC ஆனது AC =BC ஆகுமாறும் $A\hat{C}B=60^0$ ஆகுமாறும் உள்ள $5m$ திணிவுள்ள ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் திணிவுமையத்தின் ஊடான நிலைக்குத்து குறுக்கு வெட்டாகும். $CA\,,CB$ என்பன அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதிஉயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். முகம் AB ஆனது ஒரு ஒப்பமான கிடை நிலத்தை தொட்டுக்கொண்டிருக்க முறையே $3m\,,m$ திணிவுள்ள P,Q ஆகிய துணிக்கைகள் படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு இலேசான நீளா இழையின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையானது

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

உச்சி C இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான இலேசான கப்பியின் மேலாகச் சென்று இழை இறுக்கமாகவும் இழையின் பகுதிகள் அதி உயர் சரிவுக் கோடுகள் வழியே இருக்குமாறும் பிடிக்கப்பட்டு தொகுதி மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் ஒரு குறித்த கணத்தில் ஆப்பானது புள்ளி O இல் இருந்து x தூரத்திலும் துணிக்கை P ஆனது C இல் இருந்து அதிஉயர் சரிவுக்கோட்டின் வழியே y தூரத்திலும் காணப்படின்.

$i)$ ஆப்பு , துணிக்கைகளில் தாக்கும் விசைகளைக் குறிக்க.

$ii)$ ஆப்பு , துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல்களை $\ddot{x}, \ddot{y}$ சார்பில் எழுதுக.

$iii)$ ஆப்பின் ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{\sqrt{3}}{16}g$ எனவும் துணிக்கை P இன் ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{\sqrt{201}}{32}g$ எனவும் காட்டுக.

$iv)$ தரையினால் ஆப்பின் மீது தாக்கும் மறுதாக்கத்தின் பருமனைக் காண்க.

$v)$ துணிக்கை P, Q இன் மீது ஆப்பினால் கொடுக்கப்படும் மறுதாக்கங்களைக் காண்பதற்கான சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

17.

a) i) $\underline{a}, \underline{b}$ என்பன பூச்சியமற்ற சமாந்தரமற்ற காவிகளாகவும் $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0}$ ஆகவும் இருப்பின் $\alpha = 0, \beta = 0$ எனக் காட்டுக

ii) புள்ளி O குறித்து A,B என்ற புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $2\underline{a}$, $\underline{b} - \underline{a}$ ஆகும். $BM{:}MA = 1{:}2$ ஆகுமாறு AB இல் உள்ள புள்ளி M ஆகும். OA இற்கு சமாந்தரமாக B ஊடாக வரையும் நேர்கோடு நீட்டிய OM ஐ C இல் சந்திக்கிறது. இங்கு $OM = \lambda OC$ ஆகும்

I. $\overrightarrow{AB}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ சார்பாக காண்க

II. $\overrightarrow{MB}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ சார்பாக காண்க

III. முக்கோண காவிக் கூட்டல் விதியை பயன்படுத்தி $\overrightarrow{OM}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ சார்பாக காண்க.

IV. $\overrightarrow{BC}$ ஐ யாதாயினும் பரமானம் $\mu, \underline{a}, \underline{b}$ எழுதுக.

V. $OM = \lambda OC$ ஐ பயன்படுத்தி $\overrightarrow{OM}$ ஐ $\lambda, \mu, \underline{a}, \underline{b}$ சார்பாக காண்க

VI. III, V ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி λ, μ என்பவற்றைக் காண்க

VII. C இன் தானக்காவி மற்றும் $\overrightarrow{BC}$ ஐ எழுதுக.

VIII. OM:MC ஐ உய்த்தறிக.

b) $ABCDEF$ ஆனது பக்க நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணி. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BE}$ என்பவற்றின் வழியே முறையே $4, 8, 2, \lambda\sqrt{3}, 6\ N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளானது AD க்கு செங்குத்து எனில்

i. λ ஐக் காண்க.

ii. விளையுளைக் காண்க.

iii. விளையுள் E இனூடாக செல்லும் எனக் காட்டுக

iv. விளையுள் D ஊடாக செல்வதற்கு சேர்க்கப்படவேண்டிய இணையைக் காண்க